Grandeurs quantiques et inégalités de Heisenberg.

1) Extensions spectrales et paquets d'onde classiques

A) L'inégalité spectrale temporelle.

$\Delta\omega . \Delta t \geqslant 1$ $\Delta\omega$: largeur de bande ; Δt : temps caractéristique.

B) L'inégalité spectrale spatiale.

$\Delta k . \Delta x \geqslant 1$ Δx : extension spatiale ; Δk : extension spectrale

C) La vitesse de groupe et la vitesse de phase.

. vitesse de groupe : $v_{gr} = \dfrac{d\omega}{dk}$

. vitesse de phase : $v_{ph} = \dfrac{\omega}{k}$

. relation de dispersion : $\omega = f(k)$

D) L'inégalité spectrale angulaire.

$\Delta m . \Delta\varphi \geqslant 1$ $\Delta\varphi$: extension angulaire ; Δm : dispersion spectrale

2) Les inégalités de Heisenberg. Etats et valeurs propres.

On a : $E = \hbar\omega$; $\vec{p} = \hbar\vec{k}$; $J_z = \hbar m$.

A) Energie et temps.

Inégalité de Heisenberg temporelle : $\Delta E . \Delta t \geqslant \hbar$ $(\Delta E = \hbar\Delta\omega)$

B) Quantité de mouvement et espace.

Inégalité de Heisenberg spatiale : $\Delta p . \Delta x \geqslant \hbar$ $(\Delta p = \hbar\Delta k)$

C) Moment angulaire et angle.

. Inégalité de Heisenberg angulaire : $\Delta J_z . \Delta\varphi_z \geqslant \hbar$ $(\Delta J_z = \hbar\Delta m)$

. Autres inégalités : $\Delta J_z . \Delta A_x \geqslant \hbar . |\langle A_y\rangle|$ $(\Delta\varphi_z . |\langle A_y\rangle| < \Delta A_x)$

($\vec{A}$: grandeur physique vectorielle ($\vec{p}$, $\vec{r}$, $\vec{J}$)). Dernière $\Delta J_z . \Delta A_y \geqslant \hbar |\langle A_x\rangle|$

(4 autres inégalités du même type s'en déduisent par permutation circulaire)

D) Conclusions.

L'etat d'un système quantique ne peut en général être caractérisé par des valeurs numériques attribuées aux diverses grandeurs physiques qui le caractérisent. Pour chacune de ces grandeurs, il existe certains états

particuliers où cette grandeur prend une valeur déterminée, appelée valeur propre : ce sont les états propres de cette grandeur.
Deux grandeurs physiques sont dites compatibles si leurs états propres sont les mêmes ; un tel état est alors caractérisé par une valeur propre pour chacune de ces grandeurs, qui montrent donc des dispersions simultanément nulles.

3) Applications.

A) Inégalités de Heisenberg temporelles. ($\Delta E . \Delta t \geqslant \hbar$)

- Durée de vie et largeurs d'énergie.
- Echange de particules virtuelles et portée des forces.
- Antiparticules.

B) Inégalités de Heisenberg spatiales. ($\Delta p . \Delta r \geqslant \hbar$)

- La course aux hautes énergies.
- Stabilité de l'atome d'hydrogène. On suppose le proton infiniment lourd donc immobile ; l'énergie de l'électron est : $E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$ (classique) ; si $\tilde{r}$ et $\tilde{p}$ sont les ordres de grandeur de r et p (quantique) alors $\tilde{E} \simeq \frac{\tilde{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{\tilde{r}}$ et $\tilde{p} . \tilde{r} \gtrsim \hbar$;
donc $\tilde{E} \geqslant \frac{\tilde{p}^2}{2m} - \frac{e^2 \tilde{p}}{\hbar}$ $\rightarrow$ minimum pour $E_0 \simeq -\frac{m e^4}{2\hbar^2} = -E_H$ $\left(\tilde{p}_0 \simeq \frac{m e^2}{\hbar}, \tilde{r}_0 \simeq \frac{\hbar^2}{m e^2} = a_0\right)$
Plus précisément : $E_{cin} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2}$ $(p_r = m . \dot{r}\ ,\ L = m r^2 \dot{\theta}) \rightarrow E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}$
quantiquement $\rightarrow L^2 = l(l+1)\hbar^2 \rightarrow \tilde{E}^{(l)} \simeq \frac{\tilde{p}_r^2}{2m} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m\tilde{r}^2} - \frac{e^2}{\tilde{r}}$ avec $\tilde{p} . \tilde{r} \geqslant \hbar$
approximations : $l(l+1) \simeq l^2$; $\frac{\tilde{p}_r^2}{2m} \simeq \frac{\hbar^2}{2m\tilde{r}^2} < \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m\tilde{r}^2}$ $\Rightarrow \tilde{E}_0^{(l)} \simeq -\frac{1}{l^2}\frac{m e^4}{2\hbar^2}$ $\left(\tilde{r}_0^{(l)} \simeq \frac{l^2 \hbar^2}{m e^2}\right)$

C) Inégalités de Heisenberg angulaires. ($\Delta J_z . \Delta \varphi_z \geqslant \hbar$)

- Quantification du moment angulaire : $J^2 = j(j+n)\hbar^2$ $(n = 1)$